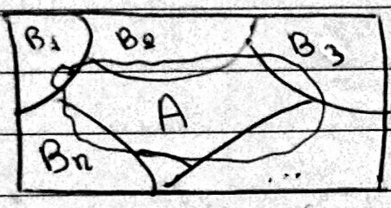
25/10/2016

Μάθημα 7ο
Πιθανότητες.

Πολλαπλασιαστικό Κανόνα
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1) \dots P(A_n/A_1\cap\dots\cap A_{n-1})$$

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας (Θ.Ο.Π.)



$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)\cdot P(B_i)$$

Τύπος ή Κανόνας Bayes
Πρόταση: Έστω $(S, \mathcal{A}, P)$ είναι χ.π. και $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ μια διαμέριση του S. Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε:

$$P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i)\cdot P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A/B_i)\cdot P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)\cdot P(B_i)}$$

Απόδειξη.
$$P(B_i/A) \overset{ορ}{=} \frac{P(A\cap B_i)}{P(A)} \overset{Θ.Ο.Π.}{=} \frac{P(A/B_i)\cdot P(B_i)}{\sum P(A/B_i)\cdot P(B_i)}$$

Παράδειγμα

2 νομίσματα — άσπρο $\longrightarrow P(K) = \frac{1}{2}$; κόκκινο $\longrightarrow P(K) = \frac{1}{3}$

ⓐ Ένα νόμισμα επιλέγεται στην τύχη και ρίχνεται μία φορά.
P (κορώνα) = ;

ⓑ Ένα νόμισμα επιλέγεται, ρίχνεται μία φορά και εμφανίζεται κ-φορές. Ποια η πιθανότητα να επιλέχτηκε κόκκινο;

Λύση.

Έστω A = {κορώνα}
B_1 = {διαλέγω άσπρο}
B_2 = {διαλέγω κόκκινο}

ⓐ $P(A) = P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = 0,417$

ⓑ $P(B_2/A) = \frac{P(A|B_2) \cdot P(B_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{0,417} = 0,4$

Παράδειγμα

Τεστ θετικό στο 80 % των περιπτώσεων που ένα άτομο έχει την ασθένεια.

Τεστ θετικό στο 10% των περιπτώσεων που ένα άτομο δεν έχει την ασθένεια

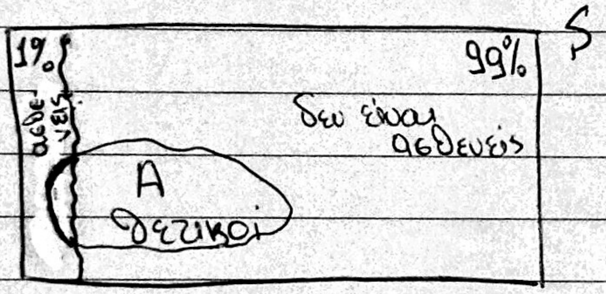
Το 1% του πληθυσμού παρουσιάζει την ασθένεια.

(a) P (το άτομο να είναι θετικό)

(b) P (το άτομο έχει ασθένεια δεδομένου ότι είναι θετικό)

Λύση

$A = \{$ τεστ θετικό $\}$



$B_1 = \{$ ασθενείς $\}$

$B_2 = \{$ να μην είναι ασθενείς $\}$

$P(B_1) = 1\% = 0{,}01$

$P(B_2) = 80\% = 0{,}8$

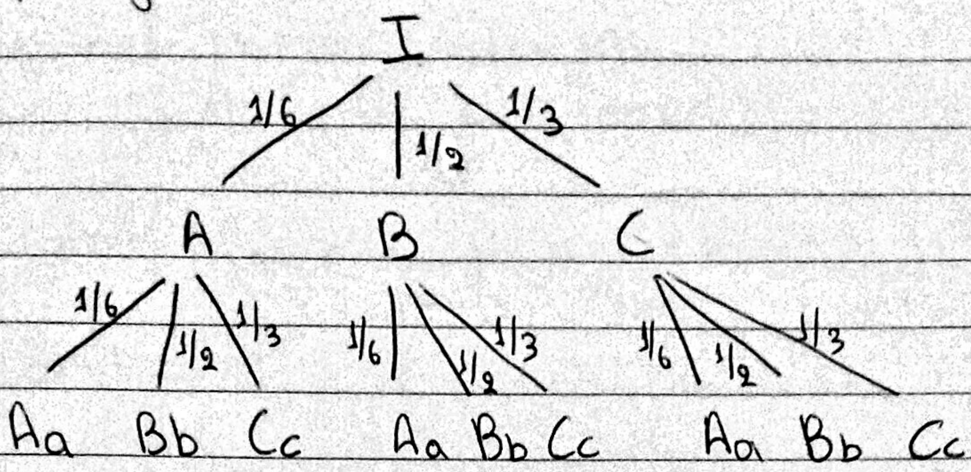
$P(A|B_2) = 10\% = 0{,}1$

(a) $P(A) \overset{\text{Θ.Ο.Π.}}{=} P(A|B_1)\cdot P(B_1) + P(A|B_2)\cdot P(B_2) =$

$= 0{,}8 \cdot 0{,}01 + 0{,}1 \cdot 0{,}99 = 0{,}107$

(b) $P(B_1 / A) = \dfrac{P(A|B_1)\cdot P(B_1)}{P(A)} = \dfrac{0{,}8\cdot 0{,}01}{0{,}107} = 0{,}075 = 7{,}5\%$

Παράδειγμα



ⓐ $P(I \longrightarrow Bb)$

ⓑ $P(I \rightarrow C \,/\, I \rightarrow Bb)$

ⓐ $P(Bb) = P(Bb/A) \cdot P(A) + P(Bb/B) \cdot P(B) + P(Bb/C) \cdot P(C) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

ⓑ $P(C/Bb) = \frac{P(Bb/C) \cdot P(C)}{P(Bb)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

Παρατήρηση. $P(C/Bb) = \frac{1}{3} = P(C)$

Είδαμε:

- $P(A/B) \geq P(A)$
- $P(A/B) \leq P(A)$
- $P(A/B) = P(A)$

Ανεξαρτησία Ενδεχομένων

$P(A/B) = P(A)$

$\downarrow$

$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$

$\downarrow$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Ορισμός. Έστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χ.π. και $A, B \in \mathcal{A}$.
Τα A και B ονομάζονται ανεξάρτητα αν ισχύει ότι:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ορισμός (Περισσότερα από δύο ενδεχόμενα)
Έστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χ.π. και $A_1, .., A_n \in \mathcal{A}$.
Τα $A_1, A_2, ..., A_n$ ονομάζονται ανεξάρτητα αν για κάθε υποσύνολο δεικτών $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$, $k \geq 2$ του $\{1, 2, ..., k\}$ ισχύει:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot ... \cdot P(A_{i_k})$$

Εφαρμογή για 3 ενδεχόμενα
Τα A_1, A_2, A_3 είναι ανεξάρτητα αν:

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2) \cdot P(A_2)$

$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3)$

$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3)$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$

Παράδειγμα. Νόμισμα -> 3 φορές
A_i = { το αποτέλεσμα της i-ρίψης είναι Κ }, $i=1,2,3$
Είναι τα A_1, A_2, A_3 ανεξάρτητα;

$S = \{ ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ, ΓΓΚ, ΓΚΓ, ΚΓΓ, ΓΓΓ \}$

$$P(A_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = P(A_2) = P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{8}$$

Ικανοποιούνται όλες οι επιμέρους προϋποθέσεις
Άρα, A_1, A_2, A_3 ανεξάρτητα.

Παρατήρηση. Τα A_i σχετίζονται με την i-επανάληψη της ίδιας διαδικασίας.

Παράδειγμα
Νόμισμα -> $P(Γ) = p$, $0 < p < 1$
ρίχνεται N-φορές.
P(εμφάνισης <u>τουλάχιστον</u> μιας φοράς της όψης "Γ") =

$= 1 - P(\text{καμιά φορά "Γ"}) = 1 - P(K_1 \cap K_2 \cap \dots \cap K_n) =$
ανεξαρτησία
$\stackrel{}{=} 1 - P(K_1) \cdot P(K_2) \cdots P(K_n) =$
$= 1 - (1-p)(1-p) \cdots (1-p) = 1 - (1-p)^n$